Title	線状函數方程式ニ就イテ（III）
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 124 p.107-p.113
Issue Date	1937-03-09
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74479
rights	
Note	

554. 線狀函數方程式ニ就イテ(III)

北川　敏男（阪大）

5. Valiron ノ方法. 函數方程式

(1) $\Gamma f(x)=0$

ニ於テ $\Gamma j(\lambda x)=G(\lambda)\,j(\lambda x)$ ニヨッテ定義サレル母函數

(2) $$G(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\lambda^n$$

ヲバ次數1, mean type ノ整函數デアルトスル。

$f(x)\in(B^{(\infty)})$ ガアリ且ツ或ル範囲ニ於テ解析的デアルトシテ (1) ニ關シテ、無限次微分方程式ニ於ケル Valiron ノ方法ヲ試ミテ見ヨウ。ソノタメ次ノ準備ガ必要デアル。

定義1.[1] $\{U_n(z)\}$ ナル z ノ整函數ノ系列ガアッテ

(3.1) $U_0(z)=1,\quad \vartheta U_0(z)=0$

(3.2) $\vartheta U_n(z)=U_{n-1}(z)\qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$

ヲ滿足スルトキコレヲ ϑ ノ基本函數系トイフ。

例. 特ニ $\vartheta f(z)\equiv\dfrac{df(z)}{dz}$ ナラバ $U_n(z)=\dfrac{z^n}{n!}$

定義2.[2] 特ニ次ノ條件ヲ滿足スル ϑ ノ基本函數系ヲバ Widder 型デアルトイフ。乃チ

---

(1) 一般ノ Transmutation ニ於テ基本函數系ヲ考ヘルコトハ既ニ Flamant Rend. Palermo, 54(1930) ガ試ミテ居ル。

(2) Widder, Trans. Am. Math. Soc. 35(1933) Sheffer, Am. Journ. Math. 57(1935) 特 p.594—597.

(4.1) $$u_n(z)=\frac{z^n}{n!}\left(1+h_n(z)\right)$$

(4.2) $$\max_{|z|\leqq R}|h_n(z)|=\lambda_n(R)$$

トオクトキ，スベテノ R ＝関シテ常＝

(4.3) $$(0\leqq)\ \underset{n}{l.u.b.}\ \lambda_n(R)=K(R)<\infty$$

定理（Sheffer）[1] $\{u_n(z)\}$ が Widder 型基本函数系デアル場合＝ハ

(5) $$n!/t^{n+1}=L_0(t)h_0^{(n)}(0)+L_1(t)\binom{n}{1}h_1^{(n-1)}(0)$$
$$+\cdots\cdots+L_{n-1}(t)\binom{n}{n-1}h'_{n-1}(0)+L_n(t)$$

＝由リ、漸次 $L_n(t)$ $(n=0,1,2,\cdots\cdots)$ ヲ定義スルトキ $|t|\geqq \rho$ ＝對シテ一様＝次ノ關係ガナリタツ。但シ $\rho=\min(r,R)$ トスル。即チ

(6) $$|L_n(t)|\leqq\frac{n!}{\rho^{n+1}}\left(1+K(R)\right)^n$$

正則函數ト ϑ トノ關係トシテ吾人ハ次ノ事ヲ假定スル。

假定 R. $f(z)$ ガ或ル領域 S デ正則デアルナラバ，ソノ領域＝含マレル任意ノ閉領域 S' ＝於テ $f(z)\in(B^{(\rho)})$ デアリ，且ツ S デ $f_n(z)\Rightarrow f(z)$ ナラバ，S' デ $\vartheta^k f_n(z)\Rightarrow\vartheta^k f(z)$ $(k=0,1,2,\cdots\cdots)$

然ルトキ吾々ハ次ノ如ク進ム事ガ出來ル。

---

(1) Sheffer, loc. cit. p 597. lemma 3 ＝含マレテ井ル。

(2) Sheffer, loc. cit. p. 597. Theorem 4 參照。此ノ目的デ $k=0$ ＝相當シタコトガ証明サレテ井ル。

定理 6[2] $\sum_{n=k}^{\infty} L_n(w) u_{n-k}(z)$ ナル級数ヲ形式的ニ考ヘル，コヽニ $|z| \leqq R$ トスル。然ルトキニハ，r ヲ任意ノ正数トシ，$\rho = \min(r, R)$，$l \leqq \dfrac{\rho}{\mathbb{K}(R)+1}$ トスルトキ $|z| \leqq l$，$|w| \geqq r$ ニ於テ一様ニ収斂シテ

(8) $$\mathscr{D}_z^{k}\left[\frac{1}{w-z}\right] = \sum_{n=k}^{\infty} L_n(w) u_{n-k}(z)$$

トナル。而シテ

(9) $$\left|\sum_{n=k}^{\infty} L_n(w) u_{n-k}(z)\right| \leqq (1+\mathbb{K}(R))\,\rho\, k!\left(\frac{1+\mathbb{K}(R)}{\rho-|z|(1+\mathbb{K}(R))}\right)^{k+1}$$

証明：

(10) $$\left|L_n(w) u_{n-k}(z)\right| \leqq \left|L_n(w)\frac{z^{n-k}}{(n-k)!}(1+h_{n-k}(z))\right|$$

$$\leqq \frac{n!}{(n-k)!}(1+\mathbb{K}(R))^{n+2}\frac{|z|^{n-k}}{\rho^{n}}$$

依ッテ考ヘル級数ノ優級数トシテ

(11) $$\frac{1}{\rho^k}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(1+\mathbb{K}(R))^{n+2}}{(n-k)!}\, n!\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^{n-k}$$

ヲ與ヘルコトガ出来ル。コレハ

(12) $$\frac{(1+\mathbb{K})^{2+k} k!}{\rho^k}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\left(\frac{z}{\rho}\right)^{n-k}(1+\mathbb{K})^{n-k}$$

ニ等シイ故、コレカラスベテ求メル事柄ヲ結論シウル。

定理 7. $g(z)$ ガ $|z-z_0| < (1+\mathbb{K}(h))(\Gamma+h)$ $(h>0)$ デ正則デアルトスル。

然ルトキニハ

(13) $$\Gamma g(z) = C_0 g(z) + C_1 \mathcal{D} g(z) + \cdots\cdots + C_n \mathcal{D}^n g(z) + \cdots\cdots$$

ハ $|z-z_0|<h$ デ定義セラレ且ツソコデ正則デアル。

証明. Cauchy ノ積分表示ニ上述 (7) ヲ代入スルトキ

(14) $$\mathcal{D}^k g(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C g(w) \sum_{n=s}^{\infty} L_n(w) \mathcal{D}^k u_n(z)\, dw$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C g(w) \sum_{n=k}^{\infty} L_n(w) u_{n-k}(z)\, dw$$

茲ニ於テ

(15) $$\sum_{k=0}^{\infty} |C_k| \left| \sum_{n=k}^{\infty} L_n(w) u_{n-k}(z) \right|$$

ヲ考ヘル。コレニ對シテ次ノモノガ majorant トナル。

$$(1+\mathbb{K}(h))\rho \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Gamma+\varepsilon)^k}{k!} k! \left(\frac{1+\mathbb{K}(h)}{\rho-|z|(1+\mathbb{K}(h))}\right)^{k+1}$$
$$= \frac{(1+\mathbb{K}(h))^2 \rho}{\rho-|z|(1+\mathbb{K}(h))} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(\Gamma+\varepsilon)(1+\mathbb{K}(h))}{\rho-|z|(1+\mathbb{K}(h))} \right|^{k+1}$$

コレカラ求メル結果ヲウル。

以上ノコトガ成立スル以上 Valiron ノ方法[1] ノ一般化ハ容易デアル。

---

(1) G. Valiron, Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre inf. et a coeff. const. Ann. d. l'Ecole Norm. 3 Tome 46 (1929)

定理 8. $f(z)$ ヲバ $|z-z_0|<(D+\beta)(1+K(h))+h$ ニ於テ正則ナル，函数方程式 (1) ノ解デアルトスル。然ルトキニハ $|z-z_0|<h$ ニ於テ一様ニ

$$(16)\qquad f(z)=\lim_{m=\infty} G\left[e^{-\beta_m\vartheta}f(z);1,2,\cdots\cdots,m\right]$$

デアル。

（註）
$$G(\lambda)=\lim_{m=\infty} e^{\beta_m\lambda}\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{\lambda}{a_n}\right),\ \beta_m=\alpha+\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{a_n}$$

$\overline{\lim_{m\to\infty}}\beta_m=\beta$ ニヨッテ β ヲ定義スル。常数 D モ $G(\lambda)$ ノミニ depend スル。（Valiron, loc. cit. p.32）

$$P(\lambda;1,2,\cdots\cdots,m)\equiv\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{\lambda}{a_n}\right),\ G(\lambda;1,2,\cdots m)$$
$$=G(\lambda)\big/P(\lambda;1,\cdots\cdots,n)$$

トオク。コレニ對應シテ $P(\vartheta;1,2,\cdots\cdots,n)$, $G(\vartheta;1,2,\cdots n)$ ナル Operator ヲ考ヘル。

6. 吾々ノ取扱ヒ來ッタ Contour-integral ニツイテ Valiron ノ方法ヲ interpretate スルノが本節ノ目的デアル。

$$S_r(z;0;f)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{j(\lambda z)}{G(\lambda)}\Gamma\left(\alpha_\lambda(f(x)\right)d\lambda$$

C_r ノ内部ニハ $a_1, a_2,\cdots\cdots, a_m$ ナル零点がアルトシ，両辺ニ対シテ $G(\vartheta;1,2,\cdots\cdots,n)e^{-\beta_m\vartheta}$ ヲ施ス。然ルトキニハ

$$(17)\qquad G\left[e^{-\beta_m\vartheta}S_r(x;0;f);1,2,\cdots\cdots,m\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_n}\frac{j(\lambda z)}{e^{\beta_m\lambda}P(\lambda;1,2,\cdots\cdots,n)}\underset{0}{\Gamma}(\mathcal{L}_\lambda(f(x))\,d\lambda$$

然ルニ,

$$(18)\quad \Gamma(\mathcal{L}_\lambda(f(x))$$
$$=P(\vartheta;1,2,\cdots\cdots,m)e^{+\beta_m\vartheta}\left[e^{-\beta_m\vartheta}G(\vartheta;1,2,\cdots,m)(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))\right]$$

他方ニ於テ次ノ補助定理ヲ準備スル。

補助定理 1. $f(z)\in(B^{(\infty)})\,(\mathcal{L}_\lambda(f(x))\in(B^{(\infty)})$ トスル。然ルトキ

$$(19)\quad \vartheta^n\mathcal{L}_\lambda(f(x))=\mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n f(x))+(\vartheta^n\mathcal{L}(f(x)))_0\,j(\lambda x)$$

証明:

$$\vartheta\mathcal{L}_\lambda(f(x))=\lambda\mathcal{L}_\lambda(f(x))+f(x)$$

ニ對シテ ϑ^n ヲ施ス。他方ニ於テ

$$\vartheta\mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n f(x))=\lambda\mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n f(x))+\vartheta^n f(x)$$

依ツテ

$$(*)\quad \vartheta\left[\vartheta^n\mathcal{L}_\lambda(f(x))-\mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n f(x))\right]$$
$$=\lambda\left[\vartheta^n\mathcal{L}_\lambda(f(x))-\mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n f(x))\right]$$

而シテ

$$\vartheta^n\mathcal{L}_\lambda(f(x))-\mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n f(x))-(\vartheta^n\mathcal{L}_\lambda(f(x)))_0\,j(\lambda x)$$

ハ (C) ニ屬シ,上ノ關係 (*) ヲミタス。ヨツテソレハ恒等的ニ零デナケレバナラナイ。

補助定理 2.

$$e^{-\beta_m\vartheta}G(\vartheta;1,2,\cdots\cdots,m)\mathcal{L}_\lambda(f(x))$$
$$(20)\quad =\mathcal{L}_\lambda(e^{-\beta_m\vartheta}G(\vartheta;1,2,\cdots\cdots,m)f(x))$$
$$+(e^{-\beta_m\vartheta}G(\vartheta;1,2,\cdots,m)\mathcal{L}_\lambda(f(x)))_0\,j(\lambda x)$$

(19) ト (20) トヲ結合スルトキ

(21) $\Gamma(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))$

$$= P(\vartheta; 1, 2, \cdots\cdots, m)\, e^{\beta_m \vartheta}\{\mathcal{L}_\lambda(e^{-\beta_m\vartheta} G(\vartheta; 1, \cdots, m) f(x))\}$$
$$+ (e^{-\beta_m\vartheta} G(\vartheta; 1, 2, \cdots\cdots, m)\, \mathcal{L}_\lambda(f(x)))_0\, P(\lambda; 1, \cdots, m)\, j(\lambda x)$$

(17) ニ代入シテ

$$G[e^{-\beta_m\vartheta} S_p(z, 0; f); 1, 2, \cdots\cdots, m]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_r} \frac{j(\lambda z)}{e^{\beta_m\lambda} p(\lambda; 1, 2, \cdots\cdots, m)} \underbrace{P(D; 1, \cdots\cdots m)\, e^{\beta_m\vartheta}}_{0}\{\mathcal{L}_\lambda(e^{-\beta_m\vartheta} G(\vartheta; 1,$$
$$\cdots\cdots, m) f(x)))\}\, d\lambda$$

$$= e^{-\beta_m\vartheta} G(\vartheta; 1, \cdots\cdots, m) f(z)$$

$$= G[e^{-\beta_m\vartheta} f(z); 1, 2, \cdots\cdots, m]$$

然ルニ、(16) ヲ用ヒルトキ

(22) $$\lim_{m\to\infty} G[e^{-\beta_m\vartheta} S_p(z, 0; f); 1, 2, \cdots\cdots, m]$$
$$= f(z)$$

ニナル、ソコデ

$$\lim_{m\to\infty} S_p(z, 0; f) = S(z, 0; f)$$

ガ存在スルトキニハ

$$S(z, 0; f) = f(z)$$

トナル。コレガ Valiron ノ定理 XVI (loc. cit. p. 41) ニ相當スルノデアル。